

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

7ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Αν A, B, Γ είναι τρία πεπερασμένα σύνολα, ναδειχθεί ότι

$$\text{card}(A \cup B \cup \Gamma) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(\Gamma) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap \Gamma) - \text{card}(B \cap \Gamma) + \text{card}(A \cap B \cap \Gamma).$$

2) Αν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $f : A \rightarrow A$ μια 1-1 συνάρτηση, τότε η f είναι επί.

3) Αν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $f : A \rightarrow A$ μια επί συνάρτηση, τότε η f είναι 1-1.

4) Αν A είναι ένα άπειρο σύνολο και $a, \beta \in A$ με $a \neq \beta$ τότε $A \setminus \{a, \beta\} \simeq A$.

5) Ναδειχθεί ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq E$, όπου $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι το δυναμοσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών και $E = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το \mathbb{N} στο $\{0, 1\}$.

6) Έστω X, Y είναι δύο σύνολα.

(α) Ναδείξετε ότι αν $X - Y \simeq Y - X$ τότε $X \simeq Y$.

(β) Υποθέτοντας επιπλέον ότι τα σύνολα X, Y είναι πεπερασμένα, ναδειχθεί ότι στο πρώτο ερώτημα ισχύει το αντίστροφο.

(γ) Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ναδείξετε ότι το αντίστροφο του πρώτου ερωτήματος δεν ισχύει χωρίς την επιπλέον υπόθεση ότι τα σύνολα X, Y είναι πεπερασμένα.

7) Ναδειχθεί ότι $[0, 1] \cup [2, 3] \simeq [0, 6]$

α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schroeder-Bernstein.

β) Με άμεση απόδειξη (χωρίς χρήση του παραπάνω θεωρήματος).

8) Ναδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του \mathbb{N} είναι αριθμήσιμο.

9) Έστω A ένα άπειρο σύνολο και B ένα αριθμήσιμο σύνολο με $A \cap B = \emptyset$. Ναδειχθεί ότι $A \cup B \simeq A$.

10) Αν A, B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα ναδειχθεί η ισοδυναμία

$$\text{card}(A) \cdot \text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) \cdot \text{card}(A \cup B) \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ή } B \subseteq A.$$